Lehrstuhl für Programmierparadigmen

Denis Lohner — denis.lohner@kit.edu
Sebastian Ullrich — sebastian.ullrich@kit.edu

Semantik von Programmiersprachen – SS 2017

http://pp.ipd.kit.edu/lehre/SS2017/semantik

Blatt 1: Mathematische Grundlagen

Besprechung: 08.05.2017

1. Äquivalenzrelationen und Ordnungen (H)

Eine **Relation** R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$, d.h., eine Menge von Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Statt $(a, b) \in R$ schreibt man oft $a\ R\ b$.

Sei im Folgenden $A = B$. R ist

reflexiv falls für alle $a \in A$ gilt: $a\ R\ a$

symmetrisch falls für alle $a, b \in A$ gilt: Wenn $a\ R\ b$, dann auch $b\ R\ a$.

antisymmetrisch falls für alle $a, b \in A$ gilt: Wenn $a\ R\ b$ und $b\ R\ a$, so gilt $a = b$.

transitiv falls für alle $a, b, c \in A$ gilt: Wenn $a\ R\ b$ und $b\ R\ c$, dann auch $a\ R\ c$.

total falls für alle $a, b \in A$ gilt: $a\ R\ b$ oder $a = b$ oder $b\ R\ a$.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation ist eine **Äquivalenzrelation**. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt **(Halb-)Ordnung**.

Sei $A = \{a, b, c\}$. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Welche Ordnungsrelationen? Welche total? Begründen Sie Ihre Antwort!

- $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
- $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$
- $R_3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$
- $R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$

2. Induktive Definitionen (H)

Ein Beispiel: *Natürliche Zahlen.* Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ lässt sich als Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wie folgt definieren:

(a) 0 ist eine natürliche Zahl.

(b) Wenn n eine natürliche Zahl ist, so ist auch $n + 1$ eine natürliche Zahl.

(c) Nichts anderes soll eine natürliche Zahl sein.

Solch eine Definition lässt sich kürzer mit Regeln schreiben:

$$0 \in \mathbb{N} \qquad\qquad \frac{n \in \mathbb{N}}{n + 1 \in \mathbb{N}}$$

Bedingung (c) ist das Charakteristikum für induktive Definitionen und liefert ein Induktionsprinzip: Regelinduktion. Formal:

$$\frac{m \in \mathbb{N} \qquad P(0) \qquad \forall n.\ n \in \mathbb{N} \wedge P(n) \longrightarrow P(n + 1)}{P(m)}$$

Dies ist genau die Regel für Induktion über natürliche Zahlen: Um eine Aussage für eine beliebige natürliche Zahl zu zeigen, genügt es, sie für 0 zu zeigen, und für $n+1$ unter der Annahme, dass sie für n gilt.

Ein Beispielbeweis: Die Summe der ersten n Zahlen ist gleich $\frac{n(n+1)}{2}$.

Formal: $P(n) \equiv \left(\sum\limits_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\right)$

- Induktionsanfang: Zu zeigen $P(0)$, d.h., $\sum\limits_{i=0}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}$ Beweis: Ausrechnen!
- Induktionsschritt: Zu zeigen: $\forall n.\ n \in \mathbb{N} \wedge P(n) \longrightarrow P(n+1)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

  Induktionannahme: Es gilt $P(n)$, d.h. $\sum\limits_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

  Zu zeigen: $P(n+1)$, d.h. $\sum\limits_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

  Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) = \text{(nach Induktionsannahme)}$$
$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \qquad \square$$

Sei $\rightarrow$ nun wieder eine Relation auf einer Menge A. Die reflexive, transitive Hülle $\rightarrow^*$ von $\rightarrow$ sei durch folgende Regeln definiert:

$$\textsc{refl}: a \rightarrow^* a \qquad\qquad \textsc{step}: \frac{a \rightarrow^* b \qquad b \rightarrow c}{a \rightarrow^* c}$$

(a) Bestimmen Sie für folgende Mengen die reflexive, transitive Hülle. Hierbei sei $A = \{a, b, c, d\}$.
   i. $\rightarrow_1 = \{(a,b),(b,d),(c,d)\}$
   ii. $\rightarrow_2 = \{(a,b),(b,c),(d,a)\}$
   iii. $\rightarrow_3 = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\}$

(b) Schreiben Sie die Induktionsregel für $\rightarrow^*$ auf.

(c) Zeigen Sie, dass $\rightarrow^*$ reflexiv ist.

(d) Zeigen Sie mittels Induktion, dass auch folgende Regel gilt:

$$\frac{x \rightarrow y \qquad y \rightarrow^* z}{x \rightarrow^* z}$$

(e) Zeigen Sie, dass $\rightarrow^*$ transitiv ist.

(f) Regelsysteme lassen sich direkt in Prolog-Prädikate übersetzen. Implementieren Sie entsprechend obiger Regeln ein Prolog-Prädikat `rtrancl(R,X,Y)`, das erfüllt ist, wenn `X` `R`* `Y` für das Prolog-Prädikat `R` gilt.

3. Falsche Induktionsbeweise (H)

Finden Sie die Fehler in folgenden Induktionsbeweisen!

(a) Alle Pferde einer endlichen Menge M von Pferden haben die gleiche Farbe.

Sei n die Anzahl der Pferde in M. Beweis durch Induktion über n.

Induktionsanfang: $n = 0$. Dann ist M leer und die Aussage trivial. Induktionsschritt: Angenommen, für alle Pferdemengen M' der Größe n gilt die Aussage. Sei M eine Pferdemenge der Größe $n+1$, also $M = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$. Dann ist $M_1 = \{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$

eine Pferdemenge der Größe n, somit haben $p_0, \ldots, p_{n-1}$ alle die gleiche Farbe. Wähle nun $M_2 = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Dies ist wieder eine Pferdemenge der Größe n, somit haben auch $p_1, \ldots, p_n$ alle die gleiche Farbe. Damit hat p_0 also die gleiche Farbe wie p_1 und p_1 die gleiche Farbe wie p_2 bis p_n, somit haben alle Pferde aus M die gleiche Farbe.

(b) Sei $\rightarrow$ eine beliebige binäre Relation auf der Menge $\{\text{grün}, \text{gelb}, \text{rot}\}$. Dann gilt, dass in der transitiven Hülle von $\rightarrow$ nur rot von rot aus erreichbar ist.

Formal: Für alle b gilt, wenn rot $\rightarrow^* b$, dann rot $= b$.

Beweis per (Regel-)Induktion über rot $\rightarrow^* b$:

- Fall REFL: Zu zeigen: rot = rot. Trivial.
- Fall STEP: Induktionsannahmen: rot $\rightarrow^* b$, $b \rightarrow c$ und $b =$ rot.
  Zu zeigen: rot $= b$. Folgt aus der Annahme.